Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 5 (2017), с. 578–595
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 5 (2017), pp. 578–595

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-578-595

УДК 514.17+517.51+519.6

Об n-мерных симплексах, удовлетворяющих включениям $S \subset [0,1]^n \subset nS$

Невский М. В.[1], **Ухалов А. Ю.**

получена 10 февраля 2017

Аннотация. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0,1]^n$. Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через σS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести S с коэффициентом σ. Под $d_i(S)$ понимается i-й осевой диаметр S, т. е. максимальная длина отрезка из S, параллельного i-й координатной оси. Пусть $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$, $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту симплекса σS. Рассмотрим квадратную матрицу $\mathbf{A}$ порядка $n+1$, строки которой содержат координаты вершин S, а последний столбец состоит из 1. Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Через λ_j обозначим линейную функцию на $\mathbb{R}^n$, коэффициенты которой составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. Ранее первым автором были доказаны равенства $\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|$, $\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}$. В статье рассматривается случай $S \subset Q_n$. Тогда все $d_i(S) \leq 1$, поэтому $n \leq \alpha(S) \leq \xi(S)$. Если же для некоторого симплекса $S' \subset Q_n$ выполняется $\xi(S') = n$, то $\xi_n = n$, $\xi(S') = \alpha(S')$ и $d_i(S') = 1$. Однако указанные S' существуют не для всех размерностей. Первое такое значение n равно 2. Для любого двумерного симплекса $\xi(S) \geq \xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\ldots > 2$. Справедлива двусторонняя оценка $n \leq \xi_n < n+1$. Равенство $\xi_n = n$ имеет место, если существует матрица Адамара порядка $n+1$. Дальнейшие исследования показали, что $\xi_n = n$ и для ряда других размерностей n. В частности, симплексы с условием $S \subset Q_n \subset nS$ были найдены для всех нечётных n в промежутке $1 \leq n \leq 11$. В первой части настоящей статьи приводятся новые результаты о симплексах, удовлетворяющих указанным включениям. Доказывается, что если $S \subset Q_n \subset nS$, то центр тяжести S совпадает с центром Q_n. Устанавливаются равенства $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2 \quad (1 \leq i \leq n)$, $\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}| = \frac{2n}{n+1} \quad (1 \leq j \leq n+1)$. Приводится ряд следствий. Во второй части статьи обсуждается следующая гипотеза. *Пусть для симплекса $S \subset Q_n$ выполняется равенство $\xi(S) = \xi_n$. Тогда $(n-1)$-мерные гиперплоскости, содержащие грани S, отсекают от куба Q_n равные по объёму части.* Хотя это справедливо для $n = 2$ и $n = 3$, в общем случае эта гипотеза не верна.

Ключевые слова: n-мерный симплекс, n-мерный куб, гомотетия, осевой диаметр, интерполяция, проектор, численные методы

Для цитирования: Невский М. В., Ухалов А. Ю., "Об n-мерных симплексах, удовлетворяющих включениям $S \subset [0,1]^n \subset nS$", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 578–595.

Об авторах:
Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, orcid.org/0000-0001-6551-5118, кандидат физ.-мат. наук,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при поддержке инициативной НИР ЯрГУ ВИП–008.

1. Определения и предварительные сведения

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0,1]^n$. Положим $e := (1, \ldots, 1)$. Для выпуклого многогранника $D \subset \mathbb{R}^n$ через $c(D)$ обозначается центр тяжести, а через $\mathrm{ver}(D)$ — совокупность вершин D. Под σD понимается образ D при гомотетии с центром в точке $c(D)$ и коэффициентом гомотетии σ. Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Через $d_i(S)$ обозначим максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного i-й координатной оси. Следуя Скотту [16], [17], будем называть $d_i(S)$ *i-м осевым диаметром* S.

Введём в рассмотрение величины, связанные с гомотетией невырожденного симплекса S. Пусть

$$\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}.$$

Число $\xi(S)$ будем называть *коэффициентом поглощения* симплексом единичного куба. Положим $\xi_n := \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту симплекса σS. Равенство $\xi(S) = \alpha(S)$ выполняется тогда и только тогда, когда симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг куба Q_n, т. е. каждая грань этого симплекса содержит вершину Q_n.

Пусть $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$ — вершины симплекса S, $1 \leq j \leq n+1$. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Через λ_j обозначим линейную функцию на $\mathbb{R}^n$, коэффициенты которой составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}.$$

Числа $\lambda_j(x)$ являются *барицентрическими координатами* точки x относительно S. Многочлены λ_j имеют важные приложения, связанные с линейной интерполяцией функций n переменных по узлам, совпадающим с вершинами S (см., например, [3], [4], [6]). Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа,* соответствующими симплексу S. Подробнее о многочленах λ_j см. [6].

Как доказано в [5], величина $d_i(S)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|\,. \tag{1}$$

Эта формула обобщается в [7] на макисмальный в симплексе отрезок, параллельный произвольному ненулевому вектору. В [6] установлено, что если $C \not\subset S$, то

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1\leq j\leq n+1} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1. \tag{2}$$

Соотношение

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)) \tag{3}$$

эквивалентно тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг Q_n. Для произвольного невырожденного симплекса S справедлива формула

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{4}$$

Доказательство равенства (4) дано в [15] (см. также [6]).

Ниже предполагается, что $S \subset Q_n$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ верно $d_i(S) \leq 1$. Из равенства (4) сразу следует, что

$$n \leq \alpha(S) \leq \xi(S). \tag{5}$$

Итак, для любого симплекса $S \subset Q_n$ коэффициент поглощения ограничен снизу размерностью пространства. Если же для некоторого симплекса S' выполняется $\xi(S') = n$, то из (5) имеем $\alpha(S') = \xi(S') = n$. Очевидно, что в этом случае $\xi_n = n$. Кроме того, из (4) получается, что для любого i верно $d_i(S') = 1$. Однако такие симплексы S' имеются не для всех размерностей n. Если в $\mathbb{R}^n$ не существует симплекс с коэффициентом поглощения n, то $\xi_n > n$. Первое такое значение n равно 2. Именно, $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\dots$; нетривиальное доказательство приводится в [6]. Другим путём неравенство $\xi_2 > 2$ выводится в п. 3 настоящей статьи.

Первым автором доказано, что $\xi_n \asymp n$. Если $n+1$ — число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка $n+1$, то $\xi_n = n$. (По поводу матриц Адамара см., например, [10].) Отметим здесь общую оценку

$$n \leq \xi_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1} < n + 1 \qquad (n > 2).$$

Так как $\xi_1 = 1, \xi_2 = 2.34\dots$, то всегда $0 \leq \xi_n - n < 1$. Эти и многие другие результаты приводятся в [6].

Заметим, что равенства $d_i(S) = 1$ и $\alpha(S) = n$ для $S \subset Q_n$ не гарантируют совпадения $\alpha(S)$ и $\xi(S)$. Например, для симплекса максимального объёма в Q_n все осевые диаметры $d_i(S)$ равны 1 (этот результат получен Лассаком [13]; другое доказательство даётся в [5] и [6]), однако вовсе не обязательно для такого симплекса $\xi(S) = n$.

Исследования, проведённые в 2016 г. вторым автором, показали, что равенство $\xi_n = n$ выполняется и для ряда размерностей n, когда $n+1$ не является числом Адамара. Симплексы с условием $S \subset Q_n \subset nS$ были обнаружены для $n = 5$ (см. [9]) и $n = 9$. К моменту написания настоящей статьи такие симплексы найдены, в частности, для всех нечётных размерностей в промежутке $1 \leq n \leq 11$.

В первой части настоящей статьи приводятся некоторые новые результаты о симплексах $S \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих включениям $S \subset Q_n \subset nS$. Вторая часть статьи связана с обсуждением следующей гипотезы, высказанной Ю. В. Богомоловым, которую авторы назвали *гипотезой о равноотсечении. Пусть для симплекса $S \subset Q_n$ выполняется $\xi(S) = \xi_n$. Тогда $(n-1)$-мерные гиперплоскости, содержащие грани S, отсекают от куба Q_n равные по объёму части.* Хотя гипотеза о равноотсечении справедлива для $n = 2$ и $n = 3$, в общем случае она не верна.

2. Теорема о симплексе с коэффициентом поглощения n

Из включений $S \subset Q_n \subset nS$ следует, что центр тяжести симплекса S совпадает с центром куба Q_n. Кроме того, эти включения обеспечивают весьма интересные свойства матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, соответствующей симплексу S. Оказывается, что в этом случае совпадают как строчные (для верхних n строк), так и столбцовые (для всех столбцов) суммы модулей элементов $\mathbf{A}^{-1}$. Установим эти факты.

Ниже $x^{(j)}$ — вершины, $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ — базисные многочлены Лагранжа симплекса S.

Теорема 1. *Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, для которого справедливы включения $S \subset Q_n \subset nS$. Тогда выполняются следующие равенства:*

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \lambda_1(x) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \lambda_{n+1}(x) = 1, \tag{6}$$

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)) = \frac{n-1}{n+1}, \tag{7}$$

$$c(S) = c(Q_n) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right), \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2 \qquad (1 \le i \le n), \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}| = \frac{2n}{n+1} \qquad (1 \le j \le n+1). \tag{10}$$

Аналогичные (6)–(7) соотношения имеют место и в случае, когда максимумы берутся по $x \in Q_n$.

Доказательство. Так как $S \subset Q_n \subset nS$, выполняется $\xi(S) \le n$. В силу (5) имеем $\xi(S) = \alpha(S) = n$. Из равенства $\xi(S) = \alpha(S)$ следует, что симплекс nS описан вокруг Q_n. Поэтому справедливо соотношение (3), означающее, что $\max(-\lambda_j(x))$ не зависит от j. Формула (2) даёт при любом $j = 1, \ldots, n+1$

$$n = \xi(S) = (n+1) \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1,$$

откуда

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = \frac{n-1}{n+1}. \tag{11}$$

Таким образом, выполняется соотношение (7).

В наших обозначениях

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = -\sum_{i\le n:\ l_{ij}<0} l_{ij} - l_{n+1,j}, \tag{12}$$

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \lambda_j(x) = \sum_{i\le n:\ l_{ij}\ge 0} l_{ij} + l_{n+1,j}. \tag{13}$$

Поскольку $x^{(j)} \in Q_n$, справедливо неравенство

$$\max_{x \in Q_n} \lambda_j(x) \geq \lambda_j\left(x^{(j)}\right) = 1. \tag{14}$$

Напомним, что $e = (1, \ldots, 1)$. Применяя (11)–(14), имеем цепочку соотношений:

$$2\lambda_j\left(\frac{1}{2}\,e\right) = 2\lambda_j\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} l_{ij} + 2l_{n+1,j} =$$

$$= \left[\sum_{i \leq n:\ l_{ij} \geq 0} l_{ij} + l_{n+1,j}\right] + \left[\sum_{i \leq n:\ l_{ij} < 0} l_{ij} + l_{n+1,j}\right] =$$

$$= \max_{x \in Q_n} \lambda_j(x) - \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) \geq 1 - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n+1}. \tag{15}$$

Итак, при каждом j

$$\lambda_j\left(\frac{1}{2}\,e\right) \geq \frac{1}{n+1}. \tag{16}$$

Покажем, что каждое соотношение (16) является равенством. Числа $\lambda_j\left(\frac{1}{2}\,e\right)$ суть барицентрические координаты точки $x = \frac{1}{2}\,e$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\left(\frac{1}{2}\,e\right) = 1.$$

Если при некотором j неравенство (16) было бы строгим, то левая часть последнего соотношения была бы строго больше правой, а это не так. Следовательно,

$$\lambda_j\left(\frac{1}{2}\,e\right) = \frac{1}{n+1}, \quad 1 \leq j \leq n+1. \tag{17}$$

Первая и последняя величины в цепочке (15) оказываются равными, поэтому неравенство в (15), а значит, и неравенство в (14) обращаются в равенства. Тем самым, справедливо соотношение (6). Поскольку λ_j — линейная функция, каждое из равенств (6)–(7) эквивалентно аналогичному соотношению, в котором максимумы берутся по $x \in Q_n$.

Равенство (8) следует из (17) и определения барицентрических координат:

$$c(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\left(\frac{1}{2}\,e\right) x^{(j)} = \frac{1}{2}\,e = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right).$$

Теперь докажем (9)–(10). Включение $S \subset Q_n$ влечёт $d_i(S) \leq 1$ $(1 \leq i \leq n)$. Но поскольку $\alpha(S) = n$, из (4) следует, что каждый осевой диаметр $d_i(S)$ равен 1. Применяя (1), имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 1.$$

Следовательно, $\sum\limits_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2$, т. е. выполняются равенства (9). Наконец, заметим, что при любом $j = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}| = \left[\sum_{i \le n:\ l_{ij} \ge 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] - \left[\sum_{i \le n:\ l_{ij} < 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] =$$

$$= \max_{x \in Q_n} \lambda_j(x) + \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = 1 + \frac{n-1}{n+1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Мы применили (6)–(7) Тем самым, справедливы равенства (10).

Отметим здесь другой способ доказательства соотношения

$$\max_{x \in Q_n} \lambda_1(x) = \ldots = \max_{x \in Q_n} \lambda_{n+1}(x) = 1. \tag{18}$$

Из доказанного равенства $c(S) = c(Q_n)$ следует, что $-S \subset -Q_n \subset -nS$. Но $-Q_n = Q_n$, значит, $S \subset Q_n \subset -nS$. Обозначим через Γ_j гиперплоскость с уравнением $\lambda_j(x) = 1$. Заметим, что каждая вершина симплекса $-nS$ при некотором j принадлежит Γ_j. Именно, если v — вершина S, лежащая в гиперплоскости $\lambda_j(x) = 0$, то её образ w при гомотетии с коэффициентом $(-n)$ и с центром гомотетии в точке $c := c(S)$ принадлежит Γ_j. Действительно, $w = -n(v - c) + c$. Положим $\mu_j(x) = \lambda_j(x) - \lambda_j(0)$. Так как μ_j — аддитивный и однородный функционал на $\mathbb{R}^n$, имеем:

$$\mu_j(w) = \mu_j(-n(v-c)+c) = -n\mu_j(v) + n\mu_j(c) + \mu_j(c) = -n\mu_j(v) + (n+1)\mu_j(c),$$

$$\lambda_j(w) = \lambda_j(0) + (-n)\big[\lambda_j(v) - \lambda_j(0)\big] + (n+1)\big[\lambda_j(c) - \lambda_j(0)\big].$$

Барицентрические координаты точки $c = c(S)$ равны $\lambda_j(c) = \frac{1}{n+1}$. Кроме того, $\lambda_j(v) = 0$. Следовательно,

$$\lambda_j(w) = (n+1)\lambda_j(0) + (n+1)\left[\frac{1}{n+1} - \lambda_j(0)\right] = 1.$$

Значит, $w \in \Gamma_j$. Итак, гомотетический образ любой из n вершин симплекса S, принадлежащих грани S с уравнением $\lambda_j(x) = 0$, лежит в гиперплоскости $\lambda_j(x) = 1$. Гомотетический образ оставшейся вершины $x^{(j)}$, очевидно, принадлежит полупространству $\lambda_j(x) < 1$. Поэтому для любого j симплекс $-nS$ содержится в полупространстве $\lambda_j(x) \le 1$. Включение $Q_n \subset -nS$ означает, что куб Q_n также принадлежит этому полупространству. Остаётся заметить, что в силу включения $S \subset Q_n$ вершина $x^{(j)}$ симплекса S содержится в Q_n. Поскольку $\lambda_j\left(x^{(j)}\right) = 1$, имеет место соотношение (18).

Теорема полностью доказана. $\square$

3. Следствия

Отметим некоторые следствия из теоремы предыдущего пункта.

Следствие 1. *Справедливо неравенство* $\xi_2 > 2$.

Доказательство. Из (5) следует, что $\xi_2 \geq 2$. Допустим, что $\xi_2 = 2$. Нетрудно показать, что минимальное значение $\xi(S)$ для $S \subset \mathbb{R}^2$ достигается на треугольнике S' с вершинами $(1, s)$, $(t, 1)$, $(0, 0)$, $0 \leq s, t \leq 1$. Допустим, что $\xi_2 = 2$. Тогда $\xi(S') = 2$, значит, справедливы включения $S' \subset Q_2 \subset 2S'$. По теореме 1, $c(S') = c(Q_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Поэтому

$$\frac{t+1}{3} = \frac{s+1}{3} = \frac{1}{2},$$

откуда $s = t = \frac{1}{2}$. Для треугольника S' с вершинами $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ $(0, 0)$ выполняется

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому базисные многочлены Лагранжа для S' имеют вид

$$\lambda_1(x) = \frac{4}{3}\,x_1 - \frac{2}{3}\,x_2, \quad \lambda_2(x) = -\frac{2}{3}\,x_1 + \frac{4}{3}\,x_2, \quad \lambda_3(x) = -\frac{2}{3}\,x_1 - \frac{2}{3}\,x_2 + 1.$$

По формуле (2) получаем

$$\xi(S') = 3 \cdot \max_{1 \leq j \leq 3, x \in \mathrm{ver}(Q_2)} (-\lambda_j(x)) + 1 = 3.$$

Итак, значение $\xi(S')$ равно 3, а не 2, как мы предположили. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Как отмечалось в п. 1, результат следствия 1 известен. Однако здесь он получается более простым способом, чем в [6].

Следствие 2. *Пусть n — чётное число. Тогда не существует симплекса S, для которого одновременно выполняются включения $S \subset Q \subset nS$ и $\mathrm{ver}(S) \subset \mathrm{ver}(Q_n)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует симплекс S, вершины $x^{(j)}$ которого совпадают с вершинами Q_n и для которого справедливы включения $S \subset Q_n \subset nS$. Из теоремы 1 имеем

$$c(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right),$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \left(\frac{n+1}{2}, \ldots, \frac{n+1}{2}\right).$$

Поскольку $x^{(j)} \in \mathrm{ver}(Q_n)$, координаты точки $u := \sum x^{(j)}$ являются целочисленными. Поэтому при чётном n последнее равенство невозможно. Мы получили противоречие. Следствие доказано. □

Следствие 3. *Включения $S\subset Q_n\subset nS$ могут быть продолжены в обе стороны следующим образом:*

$$\ldots\subset\frac{1}{n^2}\,S\subset\frac{1}{n}\,Q_n\subset S\subset Q_n\subset nS\subset n^2Q_n\subset n^3S\subset\ldots$$

Доказательство. Достаточно привлечь (8). □

Следствие 4. *Пусть $S\subset Q_n\subset nS$. Тогда для $j=1,\ldots,n+1$*

$$\sum_{i\le n:\ l_{ij}\ge 0} l_{ij}=1-l_{n+1,j},\qquad \sum_{i\le n:\ l_{ij}<0} |l_{ij}|=\frac{n-1}{n+1}+l_{n+1,j}.$$

Доказательство. Пусть $x^{(j)}$ — вершины S, $c=c(S)$. В соответствии с (8) имеем $c=c(S)=\frac{1}{2}\,e$. По свойствам барицентрических координат,

$$\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(e)x^{(j)}=e,\quad \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(0)x^{(j)}=0.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\lambda_j(e)+\lambda_j(0)}{2}\,x^{(j)}=\frac{1}{2}\,e=c.$$

Поэтому $\frac{\lambda_j(e)+\lambda_j(0)}{2}$ суть барицентрические координаты точки c. Поскольку c — центр тяжести S, каждое из этих чисел равно $\frac{1}{n+1}$. Таким образом,

$$\lambda_j(e)+\lambda_j(0)=\frac{2}{n+1}. \tag{19}$$

Из равенства (19) следуют соотношения

$$\sum_{i\le n:\ l_{ij}\ge 0} l_{ij}-\sum_{i\le n:\ l_{ij}<0} |l_{ij}|+2\lambda_j(0)=\frac{2}{n+1},$$

$$\sum_{i\le n:\ l_{ij}\ge 0} l_{ij}-\sum_{i\le n:\ l_{ij}<0} |l_{ij}|=2\left[\frac{1}{n+1}-\lambda_j(0)\right]. \tag{20}$$

Применим ещё (10), записав это равенство в виде

$$\sum_{i\le n:\ l_{ij}\ge 0} l_{ij}+\sum_{i\le n:\ l_{ij}<0} |l_{ij}|=\frac{2n}{n+1}. \tag{21}$$

Так как $\lambda_j(0)=l_{n+1,j}$, то сложение (20) и (21) даёт

$$\sum_{i\le n:\ l_{ij}\ge 0} l_{ij}=1-l_{n+1,j}.$$

Вычитая (20) из (21), получаем

$$\sum_{i\le n:\ l_{ij}<0} |l_{ij}|=\frac{n-1}{n+1}+l_{n+1,j}.$$

Следствие доказано. □

Для симплекса S введём в рассмотрение n-мерные полосы

$$G_j := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ -\frac{n-1}{n+1} \le \lambda_j(x) \le 1\right\}.$$

Следствие 5. *Пусть $S \subset Q_n \subset nS$. Тогда $Q_n \subset \bigcap\limits_{j=1}^{n+1} G_j$.*

Доказательство. Справедливо соотношение

$$\min_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \lambda_1(x) = \ldots = \min_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \lambda_{n+1}(x) = -\frac{n-1}{n+1}. \tag{22}$$

Оно эквивалентно (7), поскольку $\min \lambda_j(x) = -\max(-\lambda_j(x))$. Такое же соотношение выполняется и в случае, когда минимумы берутся по $x \in Q_n$. Из (6) и (22) вытекает, что $Q_n \subset G_j$ при каждом j. Поэтому Q_n содержится в пересечении G_j. $\square$

Следствие 6. *Предположим, что для симплекса S выполняются включения $S \subset Q_n \subset nS$. Тогда симплекс S обладает следующим свойством: замена любой его вершины на любую точку Q_n не увеличивает объём симплекса.*

Доказательство. Пусть $1 \le j \le n+1$ и $y \in Q_n$. Так как $-\frac{n-1}{n+1} \le \lambda_j(y) \le 1$ (следствие 5) и $\lambda\left(x^{(j)}\right) = 1$, справедливо неравенство

$$\mathrm{dist}(y; B_j) \le \mathrm{dist}\left(x^{(j)}; B_j\right). \tag{23}$$

Здесь B_j — $(n-1)$-мерная гиперплоскость, задаваемая уравнением $\lambda_j(x) = 0$,

$$\mathrm{dist}(y; B_j) := \min_{z\in B_j} \|y - z\|$$

— расстояние от y до B_j. Обозначим через S' симплекс с вершинами $x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}$, y, $x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n+1)}$, иначе говоря, выпуклую оболочку точек $x^{(k)}$ для $k \ne j$ и точки y. Из неравенства (23) получается, что $\mathrm{vol}\,(S') \le \mathrm{vol}(S)$. Следствие доказано. $\square$

По терминологии статьи [12], симплекс $S \subset Q_n$, для которого замена любой вершины на любую точку Q_n уменьшает его объём, называется *жёстким (rigid)*. В соответствии со следствием 6 симплекс S, для которого справедливы включения $S \subset Q_n \subset nS$, естественно назвать *почти-жёстким (quasi-rigid)*.

4. Гипотеза о равноотсечении. Случаи $n = 2$ и $n = 3$

Значения ξ_2 и ξ_3 были найдены первым автором. В [6] показано, что $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.3416\ldots$ Единственным с точностью до поворотов симплексом $S \subset Q_2$, для которого $\xi(S) = \xi_2$, является треугольник с вершинами $(0,0)$, $(1,\tau)$, $(\tau,1)$, где $\tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.3819\ldots$ (см. Рис. 1). Число τ связано с «золотым сечением» отрезка $[0,1]$, так как $\frac{\tau}{1-\tau} = \frac{1-\tau}{1}$, или $\tau^2 - 3\tau + 1 = 0$. Было сделано замечание о равенстве площадей трех треугольников, отсекаемых от квадрата сторонами S. Это следует из равенства $\tau = (1-\tau)^2$. Площадь каждого отсекаемого треугольника равна $\frac{3-\sqrt{5}}{4} = 0.1909\ldots$

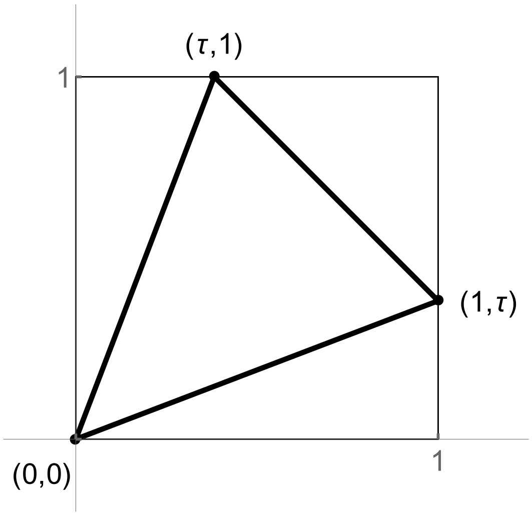

Рис. 1: Экстремальный симплекс для $n = 2$. Число τ равно $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.3819\ldots$
Fig. 1: Extremal simplex for $n = 2$. Number τ is equal $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.3819\ldots$

Случай $n = 3$ оказывается более сложным. Как показано в [6], существует (с точностью до ортогональных преобразований) ровно два симплекса, для которых $\xi(S) = \xi_3 = 3$. Ими являются симплекс S_1 с вершинами $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ (см. Рис. 2) и симплекс S_2 с вершинами $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $\left(0,\frac{1}{2},1\right)$, $\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ (см. Рис. 3). Симплекс S_1 является правильным. Каждая его грань отсекает от куба Q_3 тетраэдр одного и того же объёма, равного $\frac{1}{6}$. Грани симплекса S_2 не отсекают от куба замкнутых объёмов. Представлялось, что говорить о равноотсечении объёмов в этой ситуации не имеет смысла. В ноябре 2016 г. авторы сделали доклад на семинаре Международной научно-исследовательской лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б. Н. Делоне. Присутствовавший на этом заседании Юрий Викторович Богомолов обратил внимание на следующий факт. Если вместо граней симплекса S_2 рассматривать плоскости, содержащие эти грани, то равноотсечение имеет место и в этом случае. Действительно, оказывается, что каждая такая плоскость отсекает от куба Q_3 область, объём которой равен $\frac{1}{4}$. Отметим, что равноотсечение имеет место и при $n = 1$. В этом вырожденном случае $Q_1 = S = [0,1]$ и $\xi_1 = 1$. Границы симплекса отсекают от куба Q_1 равные отрезки длины 0.

Таким образом и возникла *гипотеза о равноотсечении*, которая была сформулирована выше (см. п. 1). Напомним формулировку этой гипотезы.

Пусть для симплекса $S \subset Q_n$ выполняется равенство $\xi(S) = \xi_n$. Тогда $(n-1)$-мерные гиперплоскости, содержащие грани S, отсекают от куба Q_n равные по объёму части.

Подтверждение гипотезы означало бы открытие новой закономерности для экстремальных симплексов.

Как отмечалось выше, точные значения ξ_n и соответствующие экстремальные симплексы к настоящему времени известны для $n = 2$ и всех таких n, для которых $n + 1$ является числом Адамара. Авторами также доказано, что $\xi_5 = 5$ и $\xi_9 = 9$.

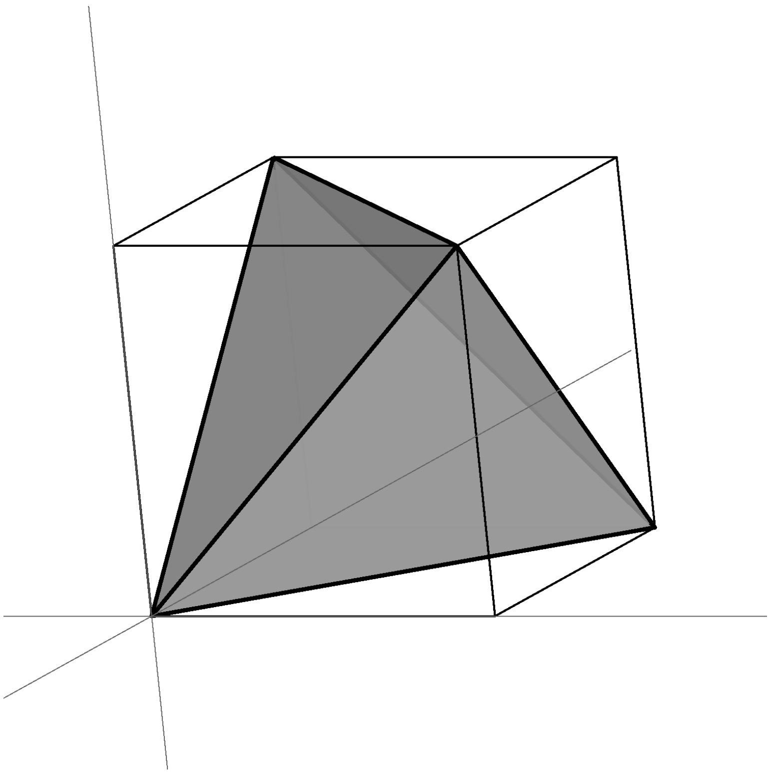

Рис. 2: Симплекс S_1
Fig. 2: Simplex S_1

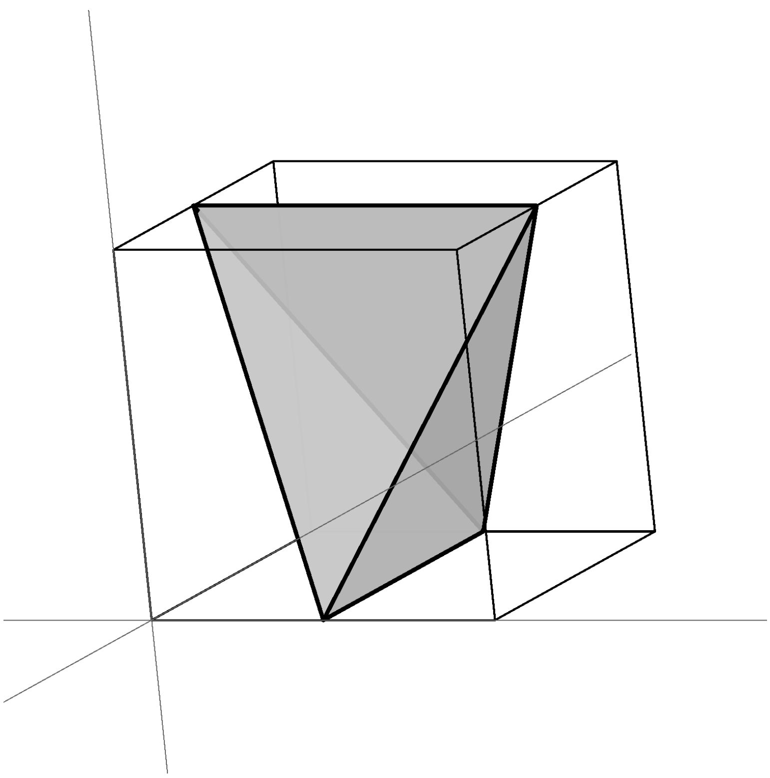

Рис. 3: Симплекс S_2
Fig. 3: Simplex S_2

Таким образом, кроме ξ_2, все известные значения ξ_n равны n, а экстремальные симплексы S удовлетворяют включениям $S \subset Q_n \subset nS$.

Заметим, что когда $n+1$ — число Адамара, правильный симплекс, вписанный в Q_n, обладает свойством равноотсечения в силу симметрии.

5. О вычислении объёма части n-мерного куба, отсекаемой гиперплоскостью

Вычисление объёма, отсекаемого $(n-1)$-мерной гиперплоскостью от куба Q_n, при $n > 3$ является довольно трудной задачей. Задачи о вычислении объёмов многомерных тел рассматривалась во многих работах. Применяемые нами формулы приводятся, например, в сравнительно недавней статье [2], хотя получены они были значительно раньше. Исторические комментарии относительно этих формул можно найти в статье [11]. Приведем утверждения из [11], используемые в настоящей работе.

Теорема 2. *Пусть $n > 2$, $Q'_n = [-1,1]^n$. Рассмотрим гиперплоскость*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (a,x) = b\},$$

где $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\operatorname{vol}(Q'_n \cap H) = \frac{|a|}{\pi} \cdot 2^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(a_k t)}{a_k t} \right) \cdot \cos(bt)\, dt. \tag{24}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда*

$$\operatorname{vol}(Q'_n \cap H) = \frac{|a|}{2(n-1)!} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \sum_{w \in \operatorname{ver}(Q'_n)} ((a,w)+b)^{n-1} \operatorname{sign}((a,w)+b) \prod_{k=1}^{n} w_k. \tag{25}$$

Здесь $w = (w_1, \ldots, w_n)$ — вершины куба Q'_n , т. е. $w_k = \pm 1$. Суммирование производится по вершинам куба.

Формулы (24) и (25) позволяют найти $(n-1)$-мерный объём сечения куба Q'_n гиперплоскостью H.

Отметим, что приведённые формулы можно применять и в случае, когда некоторые из a_k обращаются в нуль. Если $a_1, \ldots, a_m \neq 0$, а $a_{m+1}, \ldots, a_n = 0$, то $Q'_n \cap H = (Q'_m \cap H') \times Q'_{n-m}$, где $H' = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \ldots a_m x_m = b\}$. Следовательно,

$$\operatorname{vol}(Q'_n \cap H) = \operatorname{vol}(Q'_m \cap H') \cdot \operatorname{vol}(Q'_{n-m}) = \operatorname{vol}(Q'_m \cap H') \cdot 2^{n-m}.$$

Здесь $\operatorname{vol}(Q'_m \cap H')$ — m-мерный объём множества $Q'_m \cap H'$, $\operatorname{vol}(Q'_{n-m})$ — $(n-m)$-мерный объём куба Q'_{n-m}. Величина $\operatorname{vol}(Q'_m \cap H')$ может быть найдена с помощью (24) или (25).

Если в уравнении гиперплоскости $|a| = 1$, то b есть расстояние со знаком от гиперплоскости H до начала координат. В этом случае интеграл по b в пределах от b_0 до $+\infty$ от правой части любой из формул (24), (25) равен объёму пересечения Q'_n и полупространства $\{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) \geq b_0\}$. На практике требуется вычислить интеграл лишь по некоторому конечному промежутку, длина которого равна расстоянию от H до наиболее удаленной от нее вершины куба, лежащей в нужном полупространстве. Этот метод и был нами использован для вычисления объёмов частей куба, отсекаемых гиперплоскостями граней.

Интеграл в правой части (24) сводится к известным интегралам. Отметим, что этот интеграл равномерно сходится по параметру b и, следовательно, его можно интегрировать по этому параметру. Применима также теорема об изменении порядка интегрирования. Формула (25) не содержит интеграла и выглядит более простой. Наш опыт, однако, показал, что вычисление интеграла по b от правой части (25) может быть более трудной задачей, чем от правой части (24). В обоих случаях получающиеся выражения могут быть довольно громоздкими. Для вычислений мы применяли систему Wolfram Mathematica (см., например, [1], [14]). Нас интересовали части, отсекаемые гиперплоскостями от куба $Q_n = [0,1]^n$, поэтому в расчётные формулы были внесены соответствующие поправки.

Как отмечалось выше, числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки x относительно соответствующего симплекса. Это означает, что уравнения $(n-1)$-мерных гиперплоскостей, содержащих грани симплекса, имеют вид $\lambda_j(x) = 0$. Для каждого $j = 1, \ldots, n+1$ гиперплоскость с уравнением $\lambda_j(x) = 1$ содержит вершину симплекса $x^{(j)}$. Пусть S — симплекс, принадлежащий Q_n. Всюду далее через $\mathrm{vol}_j(S)$ мы обозначаем объём области $Q_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) \leq 0\}$.

6. Случай $n = 4$

Точное значение ξ_4 пока неизвестно. Наилучшая на данный момент оценка этой величины $4 \leq \xi_4 \leq \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.1141\ldots$ получена в работе авторов [8]. Там же высказана гипотеза, что найденная верхняя граница является точным значением, т. е. $\xi_4 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$. Для доказательства вторым автором были построены два симплекса, на которых данная оценка достигается. Это симплекс T с вершинами $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 0, 0\right)$, $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 0, 1\right)$, $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 1, 1\right)$, $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 1, 0\right)$ и симплекс R с вершинами $\left(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$, $\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{2}, 1, 1\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. В [8] показано, что $\xi(T) = \xi(R) = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$. Результаты численных экспериментов позволяют предположить, что указанные симплексы являются экстремальными. Однако строгое доказательство этого факта пока не найдено.

С помощью формул п. 5 были найдены объёмы, отсекаемые от Q_n гиперплоскостями, содержищими грани симплексов:

$$\mathrm{vol}_j(T) = \frac{259\sqrt{13} - 61}{3888} = 0.2244\ldots, \quad j = 1, 2, 4, 5; \quad \mathrm{vol}_3(T) = \frac{7 + \sqrt{13}}{36} = 0.2945\ldots$$

$$\mathrm{vol}_j(R) = \frac{35 + 17\sqrt{13}}{324} = 0.2972\ldots, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \mathrm{vol}_5(R) = \frac{7 + \sqrt{13}}{36} = 0.2945\ldots$$

Таким образом, для симплексов T и R равенства отсекаемых объёмов нет. Этот факт, однако, ещё не доказывает, что гипотеза о равноотсечении не верна, так как экстремальность симплексов T и R строго не доказана.

Интерес представляет тот факт, что распределение значений отсекаемых объёмов для симплексов T и R имеет тот же характер, что и для случаев, когда экстремальные симплексы известны точно.

7. Случай $n = 5$

Точное значение ξ_5 найдено в [9] как результат исследований каждого из авторов настоящей статьи. В [4] первый автор доказал, что для любого n справедливо $\xi_n \geq n$. Другое доказательство этого неравенства, связанное с применением осевых диаметров, дано им в [5] (см. также [15] и [6]); этот подход описан в п. 1. Позднее второму автору удалось построить симплекс S, для которого справедливы включения $S \subset Q_5 \subset 5S$ (см. [9], теорема 4). Это даёт $\xi_5 \leq 5$. Таким образом, $\xi_5 = 5$.

Вершины симплекса S имеют вид $\left(1, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{47}{100}\right)$, $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{47}{100}\right)$, $\left(0, 0, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{59}{100}\right)$, $\left(0, 1, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, 0\right)$, $\left(0, 1, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, 1\right)$, $\left(1, \frac{1}{3}, 1, 0, \frac{47}{100}\right)$. В [9] установлено, что S обладает ещё одним интересным свойством: все вершины Q_5 принадлежат границе симплекса $5S$. Вычисления по формулам п. 5 дают $\mathrm{vol}_j(S) = \frac{1}{3}$, $j = 1, \ldots, 5$. Таким образом, для этого симплекса равноотсечение имеет место.

Однако именно в случае $n = 5$ гипотезу о равноотсечении всё же удаётся опровергнуть. Как оказалось, симплекс S не является единственным пятимерным симплексом с коэффициентом поглощения n (с точностью до ортогональных преобразований). Рассмотрим симплекс $F = F(t)$ с вершинами $(1,0,0,0,1)$, $(1,1,t,1,0)$, $(0,0,1-t,1,0)$, $(0,1,t,0,0)$, $(0,1,1-t,1,1)$, $(1,0,1,0,1)$. Для $t \in [0,1]$ симплекс F принадлежит Q_5. В [9] доказано, что при $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ справедливы включения $F \subset Q_5 \subset 5F$, т. е. $\xi(F) = \xi_5 = 5$.

Вычисления показывают, что при $t \in [0,1]$ для объёмов, отсекаемых гиперплоскостями граней симплекса от куба Q_5, справедливы равенства

$$\mathrm{vol}_1(F(t)) = \mathrm{vol}_6(F(t)) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ f(x), & t < \frac{1}{3}, \\ g(x), & t > \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\mathrm{vol}_j(F(t)) = \frac{13}{48} = 0.2708\ldots, \quad j = 2, 3, 4, 5.$$

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, выражения для которых мы не приводим из-за их громоздкости и несущественности для дальнейшего. График зависимости объёмов $\mathrm{vol}_1(F(t))$ и $\mathrm{vol}_6(F(t))$ от параметра t приведён на Рис. 4. Отметим, что для значений t, при которых $F(t) \subset Q_5 \subset 5F(t)$, объёмы $\mathrm{vol}_1(F(t))$ и $\mathrm{vol}_6(F(t))$ остаются постоянными и равны $\frac{1}{3}$.

Семейства экстремальных симплексов, аналогичные семейству симплексов $F(t)$, были найдены вторым автором также для $n = 7$ и $n = 9$. Статья с их описанием готовится к публикации. Наши вычисления показывают, что для этих семейств отсекаемые объёмы подчиняются тем же закономерностям: при значениях параметра, соответствующих включениям $S(t) \subset Q_n \subset nS(t)$, имеются в точности два значения,

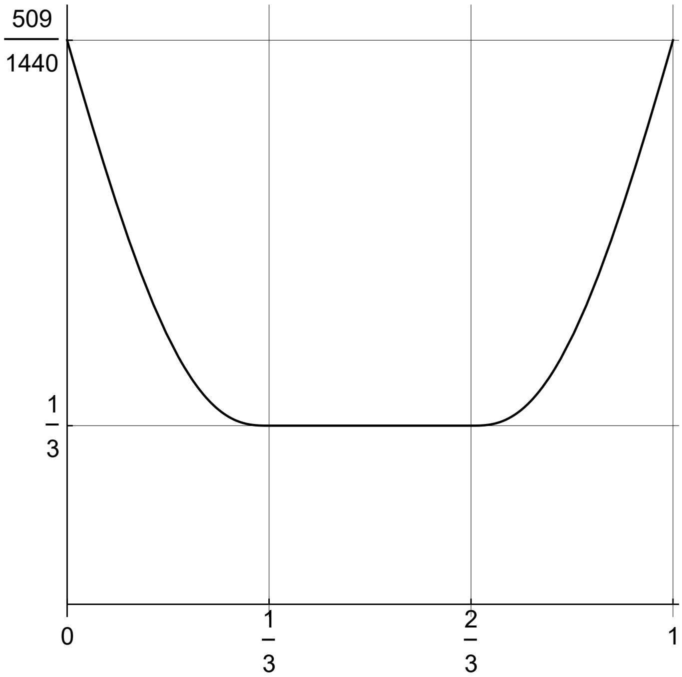

Рис. 4: График функции $\mathrm{vol}_1(F(t))$
Fig. 4: Graph of the function $\mathrm{vol}_1(F(t))$

которые принимает отсекаемый объём. Объёмы $\mathrm{vol}_1(S(t))$ и $\mathrm{vol}_{n+1}(S(t))$ отличаются от остальных и зависят от t. Графики этих зависимостей похожи на график, приведённый на Рис. 4.

На основании изложенного сделаем следующие выводы. Гипотеза о равноотсечении в приведённой нами формулировке не верна. Однако отсекаемые объёмы подчиняются некоторым закономерностям. Хотя эти объёмы могут быть и неодинаковыми, численно они довольно близки. Кроме того, для каждого из найденных экстремальных симплексов обнаружено не более двух значений, которые могут принимать отсекаемые объёмы.

Представляется важным и интересным дальнейшее изучение связи между экстремальностью симплексов и значениями отсекаемых объёмов.

8. Гипотеза о равноотсечении относительно θ_n

Обозначим через $C(Q_n)$ пространство непрерывных функций $f : C(Q_n) \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|,$$

через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 (линейных функций n переменных).

Пусть $x^{(j)}$ — вершины невырожденного симплекса $S \subset Q_n$. Введём в рассмотрение интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ по набору узлов $x^{(j)}$. Этот оператор определяется равенствами

$$Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right), \qquad 1 \leq j \leq n+1.$$

Норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$ может быть вычислена по формуле

$$\|P\| = \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Через θ_n обозначим минимальную величину $\|P\|$.

Как доказано в [4], для проектора P и соответствующего ему симплекса S справедливы соотношения

$$\frac{n+1}{2n}\left(\|P\|-1\right)+1 \le \xi(S) \le \frac{n+1}{2}\left(\|P\|-1\right)+1. \qquad (26)$$

Из (26) следует, что

$$\frac{n+1}{2n}\left(\theta_n-1\right)+1 \le \xi_n \le \frac{n+1}{2}\left(\theta_n-1\right)+1.$$

Имеет место асимптотика $\theta_n \asymp n^{1/2}$. Эта проблематика и полученные результаты подробно излагаются в монографии [6].

Точные значения θ_n к настоящему моменту аналитическими методами найдены лишь для $n = 1, 2, 3, 7$. Представляет значительный интерес любое продвижение в этом направлении. Поэтому имеет смысл обратить внимание на следующую *гипотезу о равноотсечении относительно* θ_n.

Пусть $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ *— интерполяционный проектор, для которого* $\|P\| = \theta_n$, S *— симплекс с вершинами в узлах интерполяции. Тогда* $(n-1)$*-мерные гиперплоскости, содержащие грани* S*, отсекают от куба* Q_n *равные по объёму части.*

В [6] доказано, что минимальные по норме интерполяционные проекторы при $n = 2$ и $n = 3$ имеют узлы в вершинах симплексов, для которых $\xi(S) = \xi_n$. Значит, для $n = 2$ и $n = 3$ сформулированное утверждение верно (см. п. 4). Следующее число θ_4 известно лишь предположительно. На основе компьютерных вычислений авторы в статье [8] высказали предположение, что $\theta_4 = \frac{7}{3}$. Это значение нормы достигается для проектора по узлам $(0,0,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,1)$, $(1,1,0,0)$. Для симплекса S с вершинами в этих точках имеем

$$\mathrm{vol}_j(S) = \frac{13}{48} = 0.2708\ldots, \; j = 1,2,3,5; \quad \mathrm{vol}_4(S) = \frac{1}{24} = 0.0416\ldots$$

Следовательно, этот симплекс не является равноотсекающим. Однако, строго говоря, вопрос о справедливости гипотезы о равноотсечении относительно θ_n остаётся открытым, поскольку аналитического доказательства равенства $\theta_4 = \frac{7}{3}$ пока получить не удалось.

Авторы выражают благодарность Юрию Викторовичу Богомолову и Владимиру Степановичу Климову за ценное обсуждение и полезные советы.

Список литературы / References

[1] Климов В. С., Ухалов А. Ю., *Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2014, 96 с.; [Klimov V. S., Ukhalov A. Yu., *Reshenie zadach matematicheskogo analiza s ispolzovaniem sistem kompyuternoi matematiki*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2014, 96 pp., (in Russian).]

[2] Малышев Ф. М., "Семейство равновеликих n-мерных многогранников, удовлетворяющих принципу Кавальери", *Матем. заметки*, **97**:2 (2015), 231–248; English transl.: Malyshev F. M., "Family of equal-sized n-dimensional polyhedra satisfying Cavalieri's principle", *Math. Notes*, **97**:1 (2015), 213–229.

[3] Невский М. В., "Неравенства для норм интерполяционных проекторов", *Модел. и анализ информ. систем*, **15**:3 (2008), 28–37; [Nevskij M. V., "Inequalities for the norms of interpolating projections", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **15**:3 (2008), 28–37, (in Russian).]

[4] Невский М. В., "Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора", *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1 (2009), 24–43; [Nevskij M. V., "On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:1 (2009), 24–43, (in Russian).]

[5] Невский М. В., "Об одном свойстве n-мерного симплекса", *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., "On a property of n-dimensional simplices", *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 543–555.

[6] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpolyacii*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2012, (in Russian).]

[7] Невский М. В., "Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления", *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:2 (2013), 147–152; English transl.: Nevskii M. V., "Computation of the longest segment of a given direction in a simplex", *Journal of Math. Sciences*, **203**:6 (2014), 851–854.

[8] Невский М. В., Ухалов А. Ю., "О числовых характеристиках симплекса и их оценках", *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:5 (2016), 602–618; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "On numerical charasteristics of a simplex and their estimates", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 602–618, (in Russian).]

[9] Невский М. В., Ухалов А. Ю., "Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом", *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:1 (2017), 94–110; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "New estimates of numerical values related to a simplex", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 94–110, (in Russian).]

[10] Холл М., *Комбинаторика*, Мир, Москва, 1970; [Hall M., Jr, *Combinatorial theory*, Blaisdall publishing company, Waltham (Massachusets) – Toronto – London, 1967, (in English).]

[11] Frank R., Riede H., "Hyperplane sections of the n-dimensional cube", *Amer. Math. Monthly*, **119**:10 (2012), 868–872.

[12] Hudelson M., Klee V., Larman D., "Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem", *Linear Algebra Appl.*, **241 –243** (1996), 519 – 598.

[13] Lassak M., "Parallelotopes of maximum volume in a simplex", *Discrete Comput. Geom.*, **21** (1999), 449–462.

[14] Mangano S., *Mathematica cookbook*, O'Reilly Media Inc., Cambridge, 2010.

[15] Nevskii M., "Properties of axial diameters of a simplex", *Discrete Comput. Geom.*, **46**:2 (2011), 301–312.

[16] Scott P. R., "Lattices and convex sets in space", *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **36** (1985), 359–362.

[17] Scott P. R., "Properties of axial diameters", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39** (1989), 329–333.

Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "On n-Dimensional Simplices Satisfying Inclusions $S \subset [0,1]^n \subset nS$", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 578–595.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-578-595

Abstract. Let $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0,1]^n$. For a nondegenerate simplex $S \subset \mathbb{R}^n$, by σS we denote the homothetic image of S with the center of homothety in the center of gravity of S and ratio of homothety σ. By $d_i(S)$ we mean the i-th axial diameter of S, i. e. the maximum length of a line segment in S parallel to the ith coordinate axis. Let $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$, $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. By $\alpha(S)$ we denote the minimal $\sigma > 0$ such that Q_n is contained in a translate of simplex σS. Consider $(n+1) \times (n+1)$-matrix $\mathbf{A}$ with the rows containing coordinates of vertices of S; the last column of $\mathbf{A}$ consists of 1's. Put $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Denote by λ_j a linear function on $\mathbb{R}^n$ with coefficients from the j-th column of $\mathbf{A}^{-1}$, i. e. $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. Earlier, the first author proved the equalities $\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|$, $\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}$. In the present paper, we consider the case $S \subset Q_n$. Then all the $d_i(S) \leq 1$, therefore, $n \leq \alpha(S) \leq \xi(S)$. If for some simplex $S' \subset Q_n$ holds $\xi(S') = n$, then $\xi_n = n$, $\xi(S') = \alpha(S')$, and $d_i(S') = 1$. However, such simplices S' do not exist for all the dimensions n. The first value of n with such a property is equal to 2. For each 2-dimensional simplex, $\xi(S) \geq \xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\ldots > 2$. We have an estimate $n \leq \xi_n < n+1$. The equality $\xi_n = n$ takes place if there exists an Hadamard matrix of order $n+1$. Further study showed that $\xi_n = n$ also for some other n. In particular, simplices with the condition $S \subset Q_n \subset nS$ were built for any odd n in the interval $1 \leq n \leq 11$. In the first part of the paper, we present some new results concerning simplices with such a condition. If $S \subset Q_n \subset nS$, the center of gravity of S coincide, with the center of Q_n. We prove that $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2 \quad (1 \leq i \leq n)$, $\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}| = \frac{2n}{n+1}$ $(1 \leq j \leq n+1)$. Also we give some corollaries. In the second part of the paper, we consider the following conjecture. *Let for simplex $S \subset Q_n$ an equality $\xi(S) = \xi_n$ holds. Then $(n-1)$-dimensional hyperplanes containing the faces of S cut from the cube Q_n the equal-sized parts.* Though it is true for $n = 2$ and $n = 3$, in the general case this conjecture is not valid.

Keywords: n-dimensional simplex, n-dimensional cube, homothety, axial diameter, interpolation, projection, numerical methods

On the authors:
Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, doctor of science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Alexey Y. Ukhalov, orcid.org/0000-0001-6551-5118, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Acknowledgments:
The work was supported by the initiative research of Yaroslavl State University VIP-008.